I.C Dévissage de $O(p,q)$

Théorème 3: Dévissage de $O(p$

Soit $p, q \neq 0$. Il existe un homéomorphisme :

$$\mathrm{O}(p,q) \cong \mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q) \times \mathbb{R}^{pq}$$

Démonstration. Soit $M \in \mathrm{O}(p,q)$,.

1. Commençons par montrer que $\mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q)$ est stable par transposition, on a :

$$M \in \mathrm{O}(p,q) \Leftrightarrow M\mathrm{I}_{p,q}{}^tM = \mathrm{I}_{p,q} \Leftrightarrow {}^tM^{-1}\mathrm{I}_{p,q}M^{-1} = \mathrm{I}_{p,q} \Leftrightarrow {}^tM^{-1} \in \mathrm{O}(p,q) \Rightarrow {}^tM \in \mathrm{O}(p,q)$$

2. Par décomposition polaire, il existe deux matrices $O \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $M = OS$. On commence par montrer que S est dans $\mathrm{O}(p,q)$ puis le même résultat découlera pour O. Soit $T = {}^tMM$. Alors $S^2 = T \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ (attention de ne pas dire que $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un groupe ! On peut justifier l'assertion précédente par le fait que les valeurs propres de S^2 sont les valeurs propres de S au carré).

   Du premier point, on en déduit : $T = {}^tMM \in \mathrm{O}(p,q)$.
   De plus, comme $\exp : \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ réalise un homéomorphisme il existe un unique $U \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ tel que $T = \exp U$.

$$\begin{aligned}
T \in \mathrm{O}(p,q) &\Leftrightarrow T\mathrm{I}_{p,q}{}^tT = \mathrm{I}_{p,q} \\
&\Leftrightarrow \exp U = T = {}^tT = \mathrm{I}_{p,q}T^{-1}\mathrm{I}_{p,q} = \mathrm{I}_{p,q}^{-1}(\exp U)^{-1}\mathrm{I}_{p,q} = \mathrm{I}_{p,q}\exp(-U)\mathrm{I}_{p,q} \\
&\Leftrightarrow \exp U = \exp\left(-\mathrm{I}_{p,q}U\mathrm{I}_{p,q}\right) \\
&\Leftrightarrow U = {}^tU = -\mathrm{I}_{p,q}^{-1}U\mathrm{I}_{p,q} \qquad (\exp : \mathscr{S}_n \to \mathscr{S}_n^{++} \text{ bijective}) \\
&\Leftrightarrow U\mathrm{I}_{p,q} + \mathrm{I}_{p,q}U = 0 \qquad (\text{condition linéaire, elle nous servira dans la dernière partie}) \\
&\Leftrightarrow \frac{U}{2}\mathrm{I}_{p,q} + \mathrm{I}_{p,q}\frac{U}{2} = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{U}{2} = -\mathrm{I}_{p,q}\frac{U}{2}\mathrm{I}_{p,q} \\
&\Leftrightarrow \exp\left(\frac{U}{2}\right) = \exp\left(-\mathrm{I}_{p,q}^{-1}\frac{U}{2}\mathrm{I}_{p,q}\right) = \mathrm{I}_{p,q}\left(\exp\left(\frac{U}{2}\right)\right)^{-1}\mathrm{I}_{p,q}.
\end{aligned}$$

   Or, on a : $\exp(U/2) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})^{++}$ et $\exp^2(U/2) = \exp U = T$puis par unicité de la racine carrée : $\exp(U/2) = S$ et par suite $S \in \mathrm{O}(p,q)$ et aussi $O \in \mathrm{O}(p,q)$. Enfin la décomposition polaire $M = OS \mapsto (O,S)$ induit l'homéomorphisme :

$$\mathrm{O}(p,q) \cong (\mathrm{O}(p,q) \cap \mathrm{O}(n)) \times (\mathrm{O}(p,q) \cap \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})).$$

3. Soit $O \in \mathrm{O}(p,q) \cap \mathrm{O}(n)$. On découpe O en blocs de tailles p et q.

   D'une part :

$$O = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(p,q) \Leftrightarrow \begin{cases} {}^tAA - {}^tBB = \mathrm{I}_p \\ {}^tAC - {}^tBD = 0 \\ {}^tCA - {}^tDB = 0 \\ {}^tCC - {}^tDD = -\mathrm{I}_q \end{cases}$$

D'autre part :

$$O = \begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(p,q) \Leftrightarrow \begin{cases} {}^tAA + {}^tBB = \mathrm{I}_p \\ {}^tAC + {}^tBD = 0 \\ {}^tCA + {}^tDB = 0 \\ {}^tCC + {}^tDD = \mathrm{I}_q \end{cases}$$

En sommant bien les relations obtenues, on a ${}^tAA = \mathrm{I}_p$ et ${}^tDD = \mathrm{I}_q$ et B et C sont nulles. On a donc :

$$\mathrm{O}(p,q) \cap \mathrm{O}(n) = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, A \in \mathrm{O}(p), D \in \mathrm{O}(q) \right\} \cong \mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q)$$

4. On définit $L = \{U \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad U\mathrm{I}_{p,q} + \mathrm{I}_{p,q}{}^tU = 0\}$. Avec la relation établie au point 2. on obtient l'homéomorphisme :

$$\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \cap L \cong \mathrm{O}(p,q) \cap \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$$

Soit $U = \begin{pmatrix} A & B \\ {}^tB & C \end{pmatrix} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \cap L$. Alors $UI_{p,q} + I_{p,q}{}^tU = \begin{pmatrix} 2A & 0 \\ 0 & 2C \end{pmatrix}$. Donc $A = 0$ et $C = 0$ et B est quelconque de taille $p \times q$.

Finalement : $\mathrm{O}(p,q) \cap \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{pq}$, d'où au final l'homéomorphisme :

$$\mathrm{O}(p,q) \cong \mathrm{O}(p) \times \mathrm{O}(q) \times \mathbb{R}^{pq}$$

■